Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Théorème 1 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme et :*

$$\Delta_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 - z = \rho e^{i\varphi},\, \rho > 0,\, |\varphi| < \theta \right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\theta}} f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n$$

Démonstration.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, et on effectue une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, et en notant $\ell = \sum_{n \geqslant 0} a_n$, on obtient :

$$f(z) - \ell = (z - 1) \sum_{n \geqslant 0} R_n z^n$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n > N$. Pour $|z| < 1$, on a :

$$|f(z) - \ell| \leqslant |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n z^n \right| \leqslant |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N+1}^{\infty} \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

Pour $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_\theta$, avec $\rho > 0$ et $|\varphi| < \theta$. On a $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$, et si $\rho \leqslant \cos\theta$, on a :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\theta - \rho^2}(1+|z|) \leqslant \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \leqslant \frac{2}{\cos\theta}$$

À présent, si $\alpha > 0$ est tel que $\alpha \sum\limits_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$, on voit que si $z \in \Delta_\theta$ et $|z - 1| \leqslant \inf\{\alpha, \cos\theta\}$, alors :

$$|f(z) - \ell| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos\theta}$$

D'où le résultat. □

Théorème 2 (Taubérien faible)**.** *Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(z) = \ell$ existe, et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $\sum a_n$ converge et $\ell = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$.*

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall\, x \in]0,1[,\ S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

et comme $1 - x^k = (1-x)\sum\limits_{i=0}^{k-1} x^i \leqslant k(1-x)$ pour $0 < x < 1$, on a :

$$|S_n - f(z)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k \leqslant (1-x)nM + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)}$$

où M désigne un majorant de $(k|a_k|)_k$. Fixons à présent $0 < \varepsilon < 1$, alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{\varepsilon}$$

Comme $(ka_k)_k$ converge vers 0, on peut choisir N_0 tel que $\sup_{k>N_0} ka_k < \varepsilon^2$, alors :

$$\forall\, n \geqslant N_0,\ \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant (M+1)\varepsilon$$

Par hypothèse, $f(x)$ tends vers ℓ quand x tend vers 1^-, donc il existe $N_1 \geqslant N_0$ tel que $\left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - \ell\right| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N_1$, ainsi :

$$\forall\, n \geqslant N_1,\ |S_n - \ell| \leqslant \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| + \left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - \ell\right| \leqslant (M+2)\varepsilon$$

Donc (S_n) converge vers ℓ, d'où le résultat. □

Conclusion. Les théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible nous donnent le comportement d'une série entière sous certaines conditions. ◁

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses